Relação Hipsométrica

Gabriel Agostini Orso

Exercício Resolvido

O inventário realizado em uma área com plantio de *Pinus taeda* L. resultou nas seguintes medições de diâmetro e altura (Tabela 1).

Tabela 1

Árv.	d (cm)	h (m)
4	16.9	10.8
2	19.3	11.6
11	22.0	20.2
7	23.9	19.5
15	25.4	16.8
14	26.5	23.5
3	27.5	22.7
5	30.6	26.4
12	31.4	24.9
9	31.9	21.6
8	32.0	24.9
10	32.9	25.0
1	33.0	21.4
13	33.9	25.7
6	36.1	27.2

Se deseja ajustar o seguinte modelo de regressão

$$\ln(h) = \beta_0 + \beta_1 . \frac{1}{d}$$

Solução

Passo 1 - Identificar X e Y

Veja que o modelo $\ln(h) = \beta_0 + \beta_1.\frac{1}{d}$ possui uma variável Y e uma variável X, sendo

$$\begin{aligned} \text{Modelo Teórico} \quad & Y = \beta_0 + \beta_1.X \\ \text{Modelo Proposto} \quad & \ln(h) = \beta_0 + \beta_1.\frac{1}{d} \end{aligned}$$

Fica claro, por analogia, que nesse caso $Y = \ln(h)$ e $X = \frac{1}{d}$.

O objetivo é encontrar os valores de β_0 e β_1 que *melhor se ajustam* aos dados. Para isso, utiliza-se o método dos *Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)*, cuja fórmula é dada por

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}}{\sum_{i=}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1.\bar{X}$$

Veja que precisamos de $\sum X$, $\sum X^2$, $\sum Y$ e $\sum XY$ para o cálculo.

Passo 2 - Calcular X, Y e seus somatórios

Vamos complementar agora a tabela com os valores de X e Y e suas varições, resultando na Tabela 2.

Tabela 2: Valores de X e Y.

	Árv	d (cm)	h (m)	X (1/d)	Y (ln(h))	X^2	Y^2	XY
	4	16.9	10.8	**0.0592**	**2.3795**	**0.0035**	**5.6622**	**0.1408**
	2	19.3	11.6	**0.0518**	**2.4510**	**0.0027**	**6.0074**	**0.1270**
	11	22.0	20.2	**0.0455**	**3.0057**	**0.0021**	**9.0341**	**0.1366**
	7	23.9	19.5	**0.0418**	**2.9704**	**0.0018**	**8.8234**	**0.1243**
	15	25.4	16.8	**0.0394**	**2.8214**	**0.0016**	**7.9602**	**0.1111**
	14	26.5	23.5	**0.0377**	**3.1570**	**0.0014**	**9.9667**	**0.1191**
	3	27.5	22.7	**0.0364**	**3.1224**	**0.0013**	**9.7492**	**0.1135**
	5	30.6	26.4	**0.0327**	**3.2734**	**0.0011**	**10.7149**	**0.1070**
	12	31.4	24.9	**0.0318**	**3.2149**	**0.0010**	**10.3354**	**0.1024**
	9	31.9	21.6	**0.0313**	**3.0727**	**0.0010**	**9.4414**	**0.0963**
	8	32.0	24.9	**0.0312**	**3.2149**	**0.0010**	**10.3354**	**0.1005**
	10	32.9	25.0	**0.0304**	**3.2189**	**0.0009**	**10.3612**	**0.0978**
	1	33.0	21.4	**0.0303**	**3.0634**	**0.0009**	**9.3844**	**0.0928**
	13	33.9	25.7	**0.0295**	**3.2465**	**0.0009**	**10.5397**	**0.0958**
	6	36.1	27.2	**0.0277**	**3.3032**	**0.0008**	**10.9112**	**0.0915**
Total	**120**	**423.3**	**322.2**	**0.5568**	**45.5152**	**0.0218**	**139.2267**	**1.6565**

Portanto agora é possível calcular os valores de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$.

Passo 3 - Estimar β_0 e β_1

Note que $\hat{\beta}_0$ precisa do valor de $\hat{\beta}_1$ para ser estimado, portanto vamos iniciar por $\hat{\beta}_1$.

$$\begin{aligned}
\sum X &= 0.5568 \\
\sum Y &= 45.5152 \\
\sum X^2 &= 0.0218 \\
\sum Y^2 &= 139.2267 \\
\sum XY &= 1.6565 \\
\bar{Y} &= 3.0343 \\
\bar{X} &= 0.0371
\end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1.6565 - \frac{(0.5568)(45.5152)}{15}}{0.0218 - \frac{(0.5568)^2}{15}} = -29.1841$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1.\bar{X}$$

$$\hat{\beta}_0 = 3.0343 - -29.1841.0.0371 = 4.117$$

Utilizando o modelo ajustado

Agora que encontramos $\hat{\beta}_0 = 4.117$ e $\hat{\beta}_1 = -29.1841$, podemos escrever

$$\ln(h) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1.\frac{1}{d}$$

Veja que o modelo ajusta $\ln(h)$, mas nossa variável de interesse é h. Portanto precisamos "remover" o logaritmo utilizando exponencial.

$$\begin{gathered}\ln(h) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1.\frac{1}{d} \\ \exp(\ln(h)) = \exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1; \frac{1}{d}) \\ h = e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \frac{1}{d}}\end{gathered}$$

O modelo final fica então como

$$h = e^{4.117 + -29.1841 \frac{1}{d}}$$

Agora podemos responder perguntas como:

1. Qual a altura do diâmetro quadrático médio (d_g)?

Sabendo que $d_g = 28.76$ cm, então

$$h = e^{4.117 + -29.1841 \frac{1}{28.76}} = 22.2 \ m$$

Somas de Quadrados

As somas de quadrados total (SQT), soma de quadrados da regressão (SQR) e soma de quadrados dos resíduos (SQE) também podem ser calculadas.

$$SQT = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}$$

$$SQR = \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n} \right)$$

$$SQE = SQT - SQR$$

Portanto

$$SQT = 139.2267 - \frac{(45.5152)^2}{15} = 1.1178$$

$$SQR = -29.1841 \left(1.6565 - \frac{(0.5568)(45.5152)}{15}\right) = 0.9638$$

$$SQE = 1.1178 - 0.9638 = 0.154$$

Coeficiente de Determinação (R^2)

Sabendo que o R^2 pode ser calculado como

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT}$$

Então

$$R^2 = \frac{0.9638}{1.1178} = 0.8622$$

Erro Padrão de Estimativa (S_{yx})

Uma vez que S_{yx} pode ser escrito como

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{SQE}{n-p}}$$

Onde p é o número de parâmetros β_i, então

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{0.154}{15-2}} = 0.11$$